

EL ARCO DE MEDIO PUNTO DE SECCION CONSTANTE EN EL METODO DE CROSS

Javier Lahuerta, Arquitecto.

EL ARCO DE MEDIO PUNTO

El arco de medio punto es un elemento constructivo que se emplea con cierta frecuencia, aunque en la época actual su importancia como forma arquitectónica no sea la que ha tenido en épocas pasadas.

En estructuras de edificación aparece ordinariamente sobre sustentaciones elásticas, pues sus arranques rara vez están en la cimentación o sobre elementos de rigidez tal que pueda prescindirse del efecto de los giros y desplazamientos de los extremos, sino que, por el contrario, el arco se encuentra unido a pilares o estructuras deformables, y el efecto de tales giros y desplazamientos pasa a ser fundamental.

El cálculo de un arco de medio punto con sustentaciones elásticas, por los métodos que suelen llamarse clásicos, es laborioso, especialmente si está unido a elementos reticulados complejos. El comportamiento elástico del arco se ve mucho más claro, y el cálculo se simplifica en modo notable aplicándole el Método de Cross.

DEFORMACION ELASTICA DEL ARCO

En la figura 1 se representa la deformación general de un arco con sustentaciones elásticas bajo un sistema de cargas; en ella aparecen los giros y los desplazamientos de extremo con los sentidos que adoptamos como positivos para ellos. El verdadero desplazamiento entre extremos se considerará asimismo positivo con el mismo criterio de sentidos anterior, medido como desplazamiento del extremo izquierdo respecto del derecho, y sus componentes son, por tanto:

$$\begin{aligned} \text{horizontal: } \Lambda &= \Lambda' - \Lambda'' \\ \text{vertical: } \Delta &= \Delta' - \Delta'' \end{aligned}$$

El estudio clásico de los arcos, desarrollado bajo la hipótesis de que la deformación por compresión y por cortadura es despreciable frente a la deformación por flexión, parte del valor de la deformación angular $d\theta$ de una rebanada de longitud ds , situada en un punto A , de coordenadas (x, y) . Denominando M el momento flector en la rebanada, E el módulo de elasticidad del material y J el momento de inercia de la sección, esta deformación vale:

$$d\theta = \frac{M}{EJ} ds$$

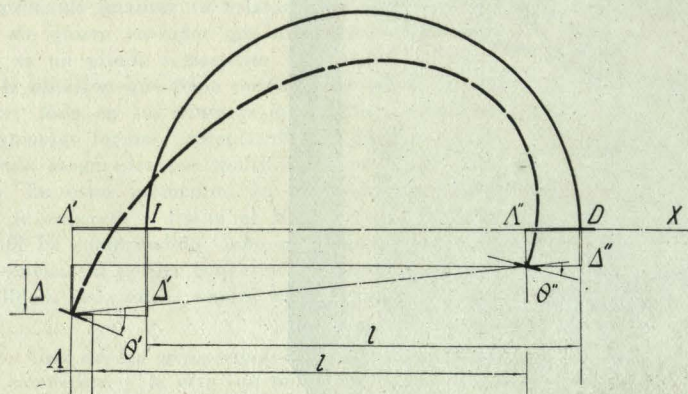


Figura 1

Supuesto fijo el extremo izquierdo del arco, por efecto de la deformación angular $d\theta$ de la rebanada ds , situada en un punto A (figura 2), el desplazamiento diferencial entre extremos tiene por componentes:

$$d_D \Delta = y d\theta = -\frac{My}{EJ} ds$$

$$d_D \Delta = (l-x) d\theta = \frac{M(l-x)}{EJ} ds$$

Supuesto fijo el extremo derecho, por efecto de la misma deformación angular, el desplazamiento diferencial entre extremos tiene por componentes:

$$d_A \Lambda = y d\theta = -\frac{My}{EJ} ds$$

$$d_A \Lambda = -x d\theta = -\frac{Mx}{EJ} ds$$

ECUACIONES DE DEFORMACION

De las componentes verticales de ambos casos deducimos los giros de extremo θ' y θ'' (figura 1), que tienen por expresiones:

$$\theta' = \frac{1}{l} \int_{ID} \frac{M(l-x)}{EJ} ds + \frac{\Delta}{l}$$

$$\theta'' = -\frac{1}{l} \int_{ID} \frac{Mx}{EJ} ds + \frac{\Delta}{l}$$

y de una cualquiera de las componentes horizontales de los desplazamientos diferenciales deducimos el desplazamiento horizontal entre extremos (figura 1):

$$\Lambda = \int_{ID} \frac{My}{EJ} ds$$

En las sustentaciones aparecen las correspondientes reacciones, cuyas componentes son las marcadas en la figura 3, en la cual están representadas con los sentidos que adoptamos como positivos. En la misma figura marcamos la sollicitación en el punto A : esfuerzo axial N , esfuerzo cortante T y mo-

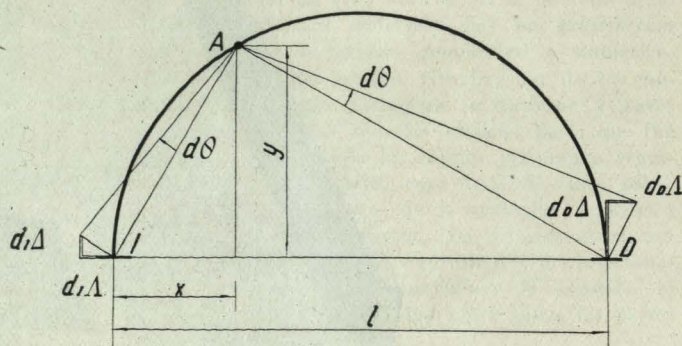


Figura 2

mento flector M , con los sentidos adoptados como positivos. Asimismo marcamos los sentidos positivos de las cargas vertical Q_u y horizontal H_u .

ARCO ISOSTATICAMENTE SUSTENTADO

Denominamos arco isostático el sustentado en su extremo izquierdo con un apoyo (libre desplazamiento horizontal y libre giro) y en su extremo derecho con una articulación (libre giro). Las reacciones de este arco isostático bajo el sistema de cargas tendrán tres componentes nulas: M' , M'' y H' , y las demás, que vamos a designar con el subíndice i para distinguirlas de las del caso general, valen:

$$V'_i = \sum_{ID} Q_u \frac{l - x_u}{l} - \sum_{ID} H_u \frac{y_u}{l}$$

$$V''_i = \sum_{ID} Q_u \frac{x_u}{l} + \sum_{ID} H_u \frac{y_u}{l}$$

$$H''_i = \sum_{ID} H_u$$

sumas en el caso de cargas aisladas, que se convierten en integrales de qds y hds en el caso de cargas repartidas.

La sollicitación en un punto cualquiera A , en este caso isostático, tiene las siguientes componentes:

$$N_i = (V'_i - \sum_{IA} Q_u) \cos \alpha + \sum_{IA} H_u \sin \alpha$$

$$T_i = (V'_i - \sum_{IA} Q_u) \sin \alpha - \sum_{IA} H_u \cos \alpha$$

$$M_i = V'_i x - \sum_{IA} Q_u (x - x_u) - \sum_{IA} H_u (y - y_u)$$

Los giros de extremo y el desplazamiento horizontal tienen en el arco de sección constante las expresiones siguientes:

$$\theta'_i = \frac{1}{l EJ} \int_{ID} M_i (l - x) ds$$

$$\theta''_i = - \frac{1}{l EJ} \int_{ID} M_i x ds$$

$$\Delta_i = \frac{1}{EJ} \int_{ID} M_i y ds$$

ARCO ELASTICAMENTE SUSTENTADO

Si ahora consideramos el caso general del arco, entre sus componentes de reacción y las del arco isostático, establecemos las siguientes expresiones:

$$V' = V'_i - \frac{M' + M''}{l}$$

$$V'' = V''_i + \frac{M' + M''}{l}$$

$$H' = H'' - H'_i$$

y la sollicitación en un punto cualquiera A , vale:

$$N = N_i - \frac{M' + M''}{l} \cos \alpha + H' \sin \alpha$$

$$T = T_i - \frac{M' + M''}{l} \sin \alpha - H' \cos \alpha$$

$$M = M_i + M' \frac{l - x}{l} - M'' \frac{x}{l} - H' y$$

Esta expresión de M es la que hay que introducir en las ecuaciones de θ' , θ'' y Δ , quedando en el arco de sección constante así:

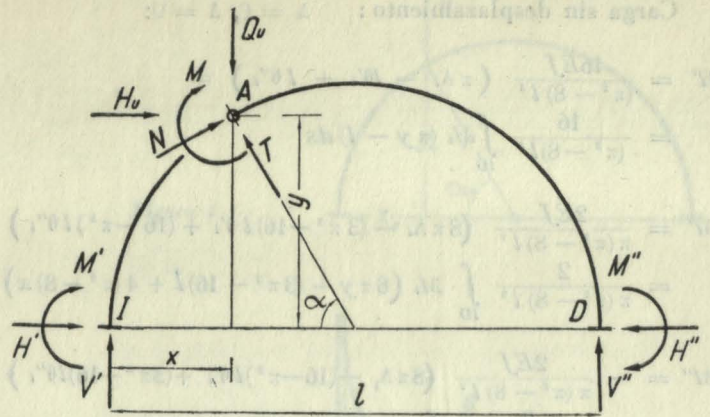


Figura 3

$$\theta' = \frac{M'}{l^2 EJ} \int_{ID} (l - x)^2 ds - \frac{M''}{l^2 EJ} \int_{ID} x (l - x) ds - \frac{H'}{l EJ} \int_{ID} (l - x) y ds + \frac{1}{l EJ} \int_{ID} M_i (l - x) ds + \frac{\Delta}{l}$$

$$\theta'' = - \frac{M'}{l^2 EJ} \int_{ID} x (l - x) ds + \frac{M''}{l^2 EJ} \int_{ID} x^2 ds + \frac{H'}{l EJ} \int_{ID} x y ds - \frac{1}{l EJ} \int_{ID} M_i x ds + \frac{\Delta}{l}$$

$$\Delta = - \frac{M'}{l EJ} \int_{ID} (l - x) y ds - \frac{M''}{l EJ} \int_{ID} x y ds - \frac{H'}{EJ} \int_{ID} y^2 ds + \frac{1}{EJ} \int_{ID} M_i y ds$$

Resueltas las integrales en el arco de medio punto, e introduciendo los valores θ'_i , θ''_i y Δ_i , las expresiones de θ' , θ'' y Δ son:

$$\theta' = \frac{l}{16 EJ} (3\pi M' - \pi M'' - 4lH') + \theta'_i + \frac{\Delta}{l}$$

$$\theta'' = \frac{l}{16 EJ} (-\pi M' + 3\pi M'' + 4lH') + \theta''_i + \frac{\Delta}{l}$$

$$\Delta = \frac{l^2}{16 EJ} (4M' - 4M'' - \pi lH') + \Delta_i$$

constituyendo las ecuaciones fundamentales del arco de medio punto. De ellas se deduce el comportamiento en cualquier caso, como se ve a continuación.

ARCO ARTICULADO

En el caso del arco con ambos extremos articulados, las condiciones generales de sustentación son: $M' = 0$, $M'' = 0$. De la tercera ecuación fundamental se despeja la incógnita H' .

Carga sin desplazamiento: $\Delta = 0$, $\Delta = 0$:

$$H' = \frac{16 EJ \Delta_i}{\pi l^3} = \frac{16}{\pi l^3} \int_{ID} M_i y ds$$

Desplazamiento horizontal sin carga: $M_i = 0$, $\Delta = 0$:

$$H' = - \frac{16 EJ \Delta}{\pi l^3}$$

Desplazamiento vertical sin carga: $M_i = 0$, $\Delta = 0$:

$$H' = 0$$

ARCO EMPOTRADO

En el caso del arco con ambos extremos empotrados, las condiciones generales de sustentación son: $\theta' = 0$, $\theta'' = 0$. Resolviendo las tres ecuaciones fundamentales se obtienen las tres incógnitas H' , M' y M'' .

Carga sin desplazamiento: $\Lambda = 0, \Delta = 0$:

$$H' = \frac{16EJ}{(\pi^2 - 8)l^3} (\pi \Lambda_i - l\theta'_i + l\theta''_i) =$$

$$= \frac{16}{(\pi^2 - 8)l^3} \int_{ID} M_i (\pi y - l) ds$$

$$M' = \frac{2EJ}{\pi(\pi^2 - 8)l^2} (8\pi \Lambda_i - (3\pi^2 - 16)l\theta'_i + (16 - \pi^2)l\theta''_i) =$$

$$= \frac{2}{\pi(\pi^2 - 8)l^2} \int_{ID} M_i (8\pi y - (3\pi^2 - 16)l + 4(\pi^2 - 8)x) ds$$

$$M'' = -\frac{2EJ}{\pi(\pi^2 - 8)l^2} (8\pi \Lambda_i - (16 - \pi^2)l\theta'_i + (3\pi^2 - 16)l\theta''_i) =$$

$$= -\frac{2}{\pi(\pi^2 - 8)l^2} \int_{ID} M_i (8\pi y - (16 - \pi^2)l - 4(\pi^2 - 8)x) ds$$

Desplazamiento horizontal sin carga: $M_i = 0, \Delta = 0$:

$$H' = -\frac{16EJ}{(\pi^2 - 8)l^3} \Lambda = \frac{4}{\pi l} (M' - M'') - \frac{16EJ\Lambda}{\pi l^2}$$

$$M' = -\frac{16EJ}{\pi(\pi^2 - 8)l^2} \Lambda$$

$$M'' = \frac{16EJ}{\pi(\pi^2 - 8)l^2} \Lambda$$

Desplazamiento vertical sin carga: $M_i = 0, \Delta = 0$:

$$H' = 0$$

$$M' = M'' = -\frac{8EJ}{\pi l^2} \Delta$$

RIGIDEZ Y TRANSMISION

Si en un arco descargado, con su extremo derecho empotrado y ambos extremos indesplazables, aplicamos en su extremo izquierdo un momento M' , se produce en dicho extremo un giro θ' , y en el extremo derecho un momento M'' .

Se denomina, como ya se sabe:

rigidez izquierda, la relación: $\rho_I = \frac{M'}{\theta'}$

transmisor izquierdo-derecho, la relación: $x_I = \frac{M''}{M'}$

Operando simétricamente tendremos la rigidez derecha ρ_D , y el transmisor derecho-izquierdo x_D . En arco con eje de simetría, ambos valores de rigidez y transmisor son iguales: $\rho_I = \rho_D = \rho$, $x_I = x_D = x$.

Haciendo $\theta' = 0$, $\Lambda = 0$ y $\Delta = 0$ en las ecuaciones fundamentales con el arco descargado, obtenemos para el arco de medio punto de sección constante:

$$\theta' = \frac{\pi(\pi^2 - 8)l}{2(3\pi^2 - 16)EJ} M'$$

o sea, rigidez: $\rho = \frac{2(3\pi^2 - 16)EJ}{\pi(\pi^2 - 8)l} = \frac{4,634EJ}{l}$

$$M'' = -\frac{16 - \pi^2}{3\pi^2 - 16} M'$$

$$\text{o sea, transmisor: } x = -\frac{16 - \pi^2}{3\pi^2 - 16} = -0,4505$$

Las reacciones que aparecen debidas a los momentos, valen:

$$H' = \frac{4}{\pi l} (M' - M'') = \frac{8\pi}{(3\pi^2 - 16)l} M' = 1,847 \frac{M'}{l}$$

$$V' = -\frac{M' + M''}{l} = -\frac{4(\pi^2 - 8)}{(3\pi^2 - 16)l} M' = -0,5495 \frac{M'}{l}$$

La rigidez ideal del arco simétrico bajo cargas simétricas, y la del arco simétrico bajo cargas antisimétricas, ambos casos con transmisión nula, valen, como ya se sabe:

rigidez ideal en simetría:

$$\rho_S = \rho(1 - x) = \frac{4\pi EJ}{\pi^2 - 8l} = \frac{6,721EJ}{l}$$

rigidez ideal en antisimetría:

$$\rho_A = \rho(1 + x) = \frac{8EJ}{\pi l} = \frac{2,546EJ}{l}$$

APLICACION DEL METODO DE CROSS

Una estructura formada por barras y arcos de medio punto se estudia por el Método de Cross del mismo modo que si se tratase de una estructura formada simplemente por barras, y aunque es bien conocido, reseñamos brevemente a continuación el camino a seguir.

Se determina primeramente la rigidez de cada una de las piezas, teniendo en cuenta las simplificaciones por simetría o antisimetría si las hay, y luego la rigidez relativa de las mismas dentro de cada nudo.

A continuación se calculan los momentos en los extremos de pieza debidos a las cargas, en el supuesto de que los nudos no giran ni desplazan (empotramiento perfecto), y asimismo los empujes en los arcos sin tener en cuenta los momentos, es decir, en el caso articulado; por medio de un Diagrama de Cross se determinan los momentos de extremo definitivos que resultan al dejar los nudos en libertad de giro.

Se analiza seguidamente la estructura para determinar todos los desplazamientos independientes de nudo que sean compatibles con la forma geométrica de la misma. En cada uno de los desplazamientos se estudian las piezas afectadas por el mismo; si se trata de una barra, la influencia a tener en cuenta será solamente giro del eje, pero si se trata de un arco, el desplazamiento dará lugar, en general, a una componente Λ y otra Δ . Dado un valor arbitrario del desplazamiento, se calculan los momentos de extremo que se producen en barras y arcos, supuestos sus extremos sin giro, y, asimismo, los empujes en los arcos sin tener en cuenta los momentos, es decir, en el caso articulado; por medio de un Diagrama de Cross se determinan los momentos de extremo definitivos resultantes al dejar los nudos en libertad de giro.

Finalmente, se plantean las ecuaciones de equilibrio de la estructura total, de partes de la estructura separadas por los convenientes cortes, o de nudo, en número igual al de los desplazamientos independientes, teniendo en cuenta que los arcos tienen reacciones con componentes V y H , ambas afectadas por los momentos de los diagramas.

Despejados de estas ecuaciones los coeficientes de desplazamiento, se calculan los momentos definitivos de nudo y las gráficas de la sollicitación de cada pieza.

Se aclarará esta rápida descripción en un ejemplo.

EFFECTO DE LAS CARGAS TIPO

Para su aplicación directa en las sucesivas etapas del Método de Cross, y en el trazado final de las gráficas de sollicitación, desarrollamos a continuación los valores de reacciones isostáticas y sollicitación isostática, así como las reacciones hiperestáticas en los casos de arco articulado y arco empotrado, para los tipos de carga que con más frecuencia se suelen presentar en el arco de medio punto con sección constante, que son:

- Carga aislada vertical en un punto cualquiera, con caso particular en la clave.
- Carga uniformemente repartida en la directriz del arco, tanto parcial como completa.
- Carga uniformemente repartida en planta del arco, parcial y completa.

CARGA AISLADA VERTICAL (GENERAL)

Según la representación de la figura 4.

Reacciones isostáticas:

$$V'_i = Q \frac{l - x_0}{l} = Q \frac{1 + \cos \alpha_0}{2}$$

$$V'_i = Q \frac{x_0}{l} = Q \frac{1 - \cos \alpha_0}{2}$$

$$H'_i = 0$$

Solicitación isostática:

$$\begin{aligned} \text{entre } \alpha = 0, \alpha_0 & \quad \text{entre } \alpha = \alpha_0, \pi \\ N_i = Q \frac{(1 + \cos \alpha_0) \cos \alpha}{2} & \quad N_i = -Q \frac{(1 - \cos \alpha_0) \cos \alpha}{2} \\ T_i = Q \frac{(1 + \cos \alpha_0) \operatorname{sen} \alpha}{2} & \quad T_i = -Q \frac{(1 - \cos \alpha_0) \cos \alpha}{2} \\ M_i = Ql \frac{(1 + \cos \alpha_0)(1 - \cos \alpha)}{4} & \quad M_i = Ql \frac{(1 - \cos \alpha_0)(1 + \cos \alpha)}{4} \end{aligned}$$

Reacciones hiperestáticas del arco articulado:

$$H' = H'' = \frac{Q}{\pi} \operatorname{sen}^2 \alpha_0$$

Reacciones hiperestáticas del arco empotrado:

$$\begin{aligned} M' &= \frac{Ql}{2\pi(\pi^2 - 8)} \left[-\pi(\pi^2 - 4) + (\pi^2 - 8)\alpha_0 + \pi(\pi^2 - 4)\cos \alpha_0 + \right. \\ &\quad \left. + \pi^2 \operatorname{sen} \alpha_0 - (\pi^2 - 8)\operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 - \pi^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 + 2\pi \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \right] \\ M'' &= -\frac{Ql}{2\pi(\pi^2 - 8)} \left[-4\pi - (\pi^2 - 8)\alpha_0 + 4\pi \cos \alpha_0 + \pi^2 \operatorname{sen} \alpha_0 + \right. \\ &\quad \left. + (\pi^2 - 8)\operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 - \pi^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 + 2\pi \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \right] \\ H' = H'' &= \frac{Q}{\pi^2 - 8} \left[-2\pi + 4\operatorname{sen} \alpha_0 + 2\pi \cos \alpha_0 - 4\alpha_0 \cos \alpha_0 + \right. \\ &\quad \left. + \pi \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \right] \end{aligned}$$

CARGA AISLADA VERTICAL (CENTRAL)

En el caso particular de una carga aislada actuando en la clave del arco ($\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$), se tienen los siguientes valores:

Reacciones isostáticas:

$$V_i = V''_i = \frac{Q}{2} \quad H''_i = 0$$

Solicitación isostática:

$$\text{entre } \alpha = 0, \frac{\pi}{2} \quad \text{entre } \alpha = \frac{\pi}{2}, \pi$$

$$\begin{aligned} N_i &= Q \frac{\cos \alpha}{2} & N_i &= -Q \frac{\cos \alpha}{2} \\ T_i &= Q \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} & T_i &= -Q \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} \\ M_i &= \frac{Ql}{4} (1 - \cos \alpha) & M_i &= \frac{Ql}{4} (1 + \cos \alpha) \end{aligned}$$

Reacciones hiperestáticas del arco articulado:

$$H' = H'' = \frac{Q}{\pi}$$

Reacciones hiperestáticas del arco empotrado:

$$\begin{aligned} M' &= -M'' = Ql \frac{4 + 2\pi - \pi^2}{4(\pi^2 - 8)} \\ H' &= H'' = Q \frac{4 - \pi}{\pi^2 - 8} \end{aligned}$$

CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA EN ARCO (PARCIAL)

El elemento de carga tiene la expresión $dQ = qds = \frac{ql}{2} d\alpha$, y la representación en planta de la carga, la ley $\frac{q}{\operatorname{sen} \alpha}$ de la figura 5.

Reacciones isostáticas:

$$\begin{aligned} V'_i &= ql \frac{\alpha_0 + \operatorname{sen} \alpha_0}{4} \\ V''_i &= ql \frac{\alpha_0 - \operatorname{sen} \alpha_0}{4} \\ H'_i &= 0 \end{aligned}$$

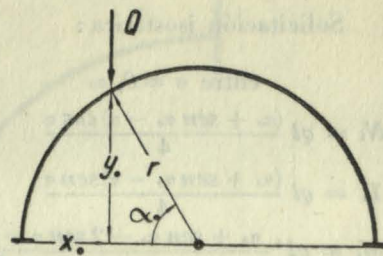


Figura 4

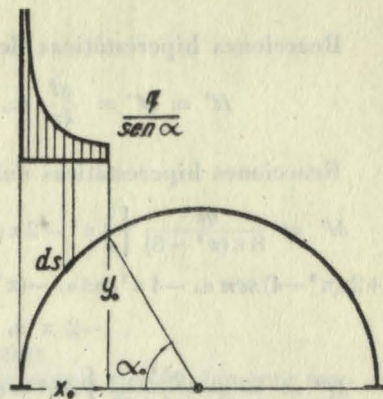


Figura 5

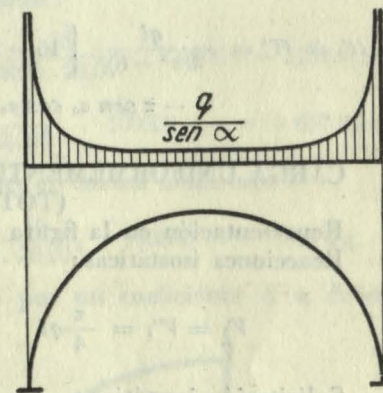


Figura 6

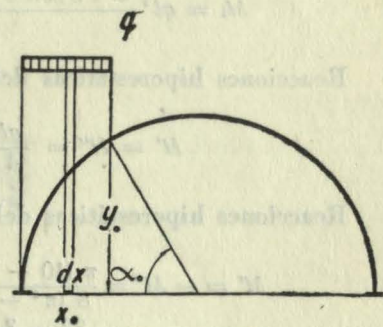


Figura 7

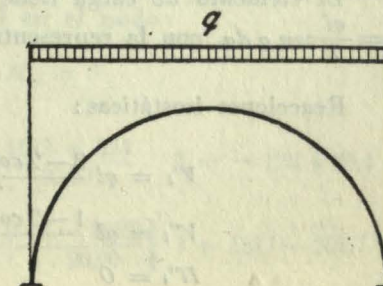


Figura 8

Solicitación isostática :

$$\begin{aligned} \text{entre } \alpha = 0, \alpha_0 & \quad \text{entre } \alpha = \alpha_0, \pi \\ N_i = ql \frac{(\alpha_0 + \operatorname{sen} \alpha_0 - \alpha) \cos \alpha}{4} & \quad N_i = -ql \frac{(\alpha_0 - \operatorname{sen} \alpha_0) \cos \alpha}{4} \\ T_i = ql \frac{(\alpha_0 + \operatorname{sen} \alpha_0 - \alpha) \operatorname{sen} \alpha}{4} & \quad T_i = -ql \frac{(\alpha_0 - \operatorname{sen} \alpha_0) \operatorname{sen} \alpha}{4} \\ M_i = ql^2 \frac{\alpha_0 + \operatorname{sen} \alpha_0 - 2 \operatorname{sen} \alpha - (\alpha_0 + \operatorname{sen} \alpha_0 - 2 \alpha) \cos \alpha}{8} & \\ M_i = ql^2 \frac{(\alpha_0 - \operatorname{sen} \alpha_0) (1 + \cos \alpha)}{8} & \end{aligned}$$

Reacciones hiperestáticas del arco articulado :

$$H' = H'' = \frac{ql}{4\pi} (\alpha_0 - \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0)$$

Reacciones hiperestáticas del arco empotrado :

$$\begin{aligned} M' &= \frac{ql^2}{8\pi(\pi^2-8)} \left[4\pi^2 - 2\pi(\pi^2-5)\alpha_0 + (\pi^2-8)\alpha_0^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\pi(\pi^2-4)\operatorname{sen} \alpha_0 - 4\pi^2 \cos \alpha_0 - (\pi^2-8)\operatorname{sen}^2 \alpha_0 - 2\pi \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 - \right. \\ &\quad \left. - 2\pi^2 \alpha_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \right] \\ M'' &= -\frac{ql^2}{8\pi(\pi^2-8)} \left[4\pi^2 - 6\pi\alpha_0 - (\pi^2-8)\alpha_0^2 + 8\pi \operatorname{sen} \alpha_0 - \right. \\ &\quad \left. - 4\pi^2 \cos \alpha_0 - (\pi^2-8)\operatorname{sen}^2 \alpha_0 + 2\pi \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 - 2\pi^2 \alpha_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \right] \\ H' = H'' &= \frac{ql}{4(\pi^2-8)} \left[16 - 3\pi\alpha_0 - 4\pi \operatorname{sen} \alpha_0^2 - 16 \cos \alpha_0 - \right. \\ &\quad \left. - \pi \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 - 8\alpha_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \right] \end{aligned}$$

CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA EN ARCO (TOTAL)

Representación en la figura 6.

Reacciones isostáticas :

$$V_i = V''_i = \frac{\pi}{4} ql \quad H'_i = 0$$

Solicitación isostática :

$$\begin{aligned} N_i &= ql \frac{(\pi - 2\alpha) \cos \alpha}{4} \\ T_i &= ql \frac{(\pi - 2\alpha) \operatorname{sen} \alpha}{4} \\ M_i &= ql^2 \frac{\pi - 2 \operatorname{sen} \alpha - \pi \cos \alpha + 2 \alpha \cos \alpha}{8} \end{aligned}$$

Reacciones hiperestáticas del arco articulado :

$$H' = H'' = \frac{ql}{4} = 0,250 ql$$

Reacciones hiperestáticas del arco empotrado :

$$\begin{aligned} M' = -M'' &= \frac{\pi(10-\pi^2)}{8(\pi^2-8)} ql^2 = 0,0219 ql^2 \\ H' = H'' &= \frac{32-3\pi^2}{4(\pi^2-8)} ql = 0,319 ql \end{aligned}$$

CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA EN PLANTA (PARCIAL)

El elemento de carga tiene la expresión $dQ = qdx = \frac{ql}{2} \operatorname{sen} \alpha d\alpha$, con la representación de la figura 7.

Reacciones isostáticas :

$$\begin{aligned} V'_i &= ql \frac{3-2\cos \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0}{8} \\ V''_i &= ql \frac{1-2\cos \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0}{8} \\ H'_i &= 0 \end{aligned}$$

Solicitación isostática :

$$\begin{aligned} \text{entre } \alpha = 0, \alpha_0 & \quad \text{entre } \alpha = \alpha_0, \pi \\ N_i &= ql \frac{(-1-2\cos \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0 + 4\cos \alpha) \cos \alpha}{8} \\ T_i &= ql \frac{(-1-2\cos \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0 + 4\cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha}{8} \\ M_i &= ql^2 \frac{(1-2\cos \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0) + (1+2\cos \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0) \cos \alpha - 2\cos^2 \alpha}{16} \end{aligned}$$

entre $\alpha = \alpha_0, \pi$

$$\begin{aligned} N_i &= -ql \frac{(1-2\cos \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0) \cos \alpha}{8} \\ T_i &= -ql \frac{(1-2\cos \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0) \operatorname{sen} \alpha}{8} \\ M_i &= ql^2 \frac{(1-2\cos \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0)(1+\cos \alpha)}{16} \end{aligned}$$

Reacciones hiperestáticas del arco articulado :

$$H' = H'' = \frac{ql}{6\pi} (2-2\cos \alpha_0 + \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \cos \alpha_0)$$

Reacciones hiperestáticas del arco empotrado :

$$\begin{aligned} M' &= \frac{ql^2}{48\pi(\pi^2-8)} \left[-4\pi(3\pi^2-16) + 9\pi^2 \alpha_0 + 12(\pi^2-8)\operatorname{sen} \alpha_0 + \right. \\ &\quad \left. + 4\pi(3\pi^2-16)\cos \alpha_0 - 9\alpha_0^2 \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 + 6\pi(\pi^2-4)\operatorname{sen}^2 \alpha_0 - \right. \\ &\quad \left. - 4(\pi^2-8)\operatorname{sen}^2 \alpha_0 + 8\pi \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 - 12(\pi^2-8)\alpha_0 \cos \alpha_0 - \right. \\ &\quad \left. - 6\pi^2 \alpha_0 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \right] \\ M'' &= \frac{ql^2}{48\pi(\pi^2-8)} \left[-32\pi + 9\pi^2 \alpha_0 - 12(\pi^2-8)\operatorname{sen} \alpha_0 + 32\pi \cos \alpha_0 - \right. \\ &\quad \left. - 9\pi^2 \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 + 24\pi \operatorname{sen}^2 \alpha_0 + 4(\pi^2-8)\operatorname{sen}^2 \alpha_0 + \right. \\ &\quad \left. + 8\pi \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 + 12(\pi^2-8)\alpha_0 \cos \alpha_0 - 6\pi^2 \alpha_0 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \right] \\ H' = H'' &= \frac{ql}{6(\pi^2-8)} \left[-4\pi + 9\alpha_0 + 4\pi \cos \alpha_0 - 9\operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 + \right. \\ &\quad \left. + 3\pi \operatorname{sen}^2 \alpha_0 + \pi \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 - 6\alpha_0 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \right] \end{aligned}$$

CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA EN PLANTA (TOTAL)

Representación en la figura 8.

Reacciones isostáticas :

$$V'_i = V''_i = \frac{ql}{2} \quad H''_i = 0$$

Solicitación isostática :

$$\begin{aligned} N_i &= ql \frac{\cos^2 \alpha}{2} \\ T_i &= ql \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} \\ M_i &= ql^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{8} \end{aligned}$$

Reacciones hiperestáticas del arco articulado :

$$H' = H'' = \frac{2ql}{3\pi} = 0,212 ql$$

Reacciones hiperestáticas del arco empotrado :

$$\begin{aligned} M' = -M'' &= \frac{32-3\pi^2}{48(\pi^2-8)} ql^2 = 0,0266 ql^2 \\ H' = H'' &= \frac{\pi}{6(\pi^2-8)} ql = 0,280 ql \end{aligned}$$

EJEMPLO

Arco de medio punto de 20,00 m de diámetro sobre pilares de 30,00 m de altura (figura 9), de la misma sección que el arco, con pies empotrados.

Carga uniforme sobre la directriz del arco $q = 1000 \text{ kg/m}$, permanente por estimarse en este caso despreciable el efecto de la sobrecarga.

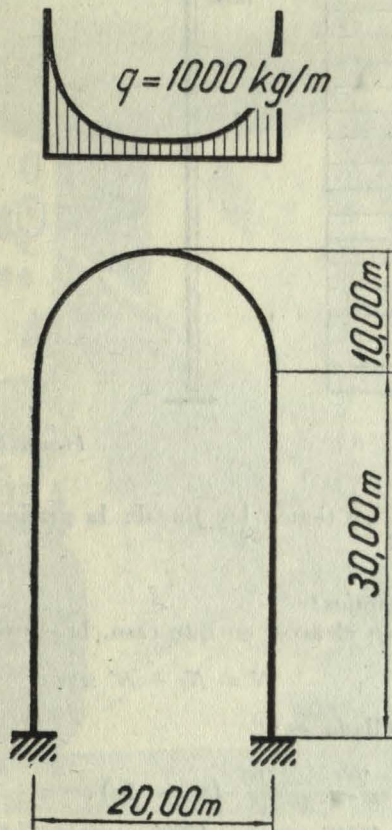


Figura 9

Rigideces de las piezas:

Arco, considerando simplificación por simetría (con $E = 1$, $J = 1$):

$$\frac{6,721 EJ}{l} = \frac{6,721}{20,00} = 0,336$$

Pilar: $\frac{4 EJ}{l} = \frac{4}{30,00} = 0,133$

Rigideces relativas:

Pilar: $\frac{0,336}{0,336 + 0,133} = 0,716$

Arco: $\frac{0,133}{0,336 + 0,133} = 0,284$

Efecto de las cargas:

Momentos de empotramiento en el arco:

$$0,0219 \cdot 1000 \cdot 20,00^2 = 8760 \text{ kgm.}$$

Empuje sin tener en cuenta momentos:

$$0,250 \cdot 1000 \cdot 20,00 = 5000 \text{ kgm.}$$

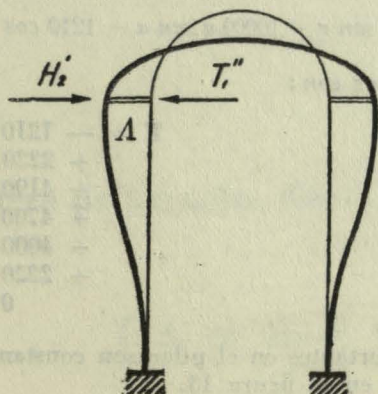
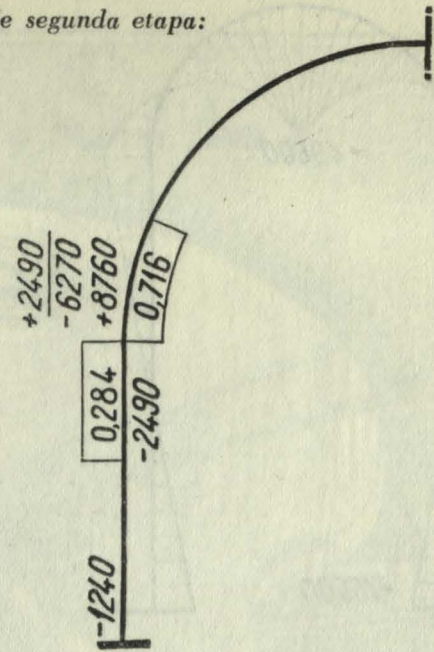


Figura 10

Diagrama de segunda etapa:



Desplazamientos independientes:

Por la simetría de figura y cargas tiene solamente uno, el indicado en la figura 10.

Los momentos iniciales a tener en cuenta, tomando arbitrariamente $\Lambda = 100.000$, serán:

Arco: $-\frac{16 EJ}{(\pi^2 - 8) l^2} \Lambda = -\frac{16}{1,8696 \cdot 20,00^2} \cdot 100000 = -2139 \text{ kgm.}$

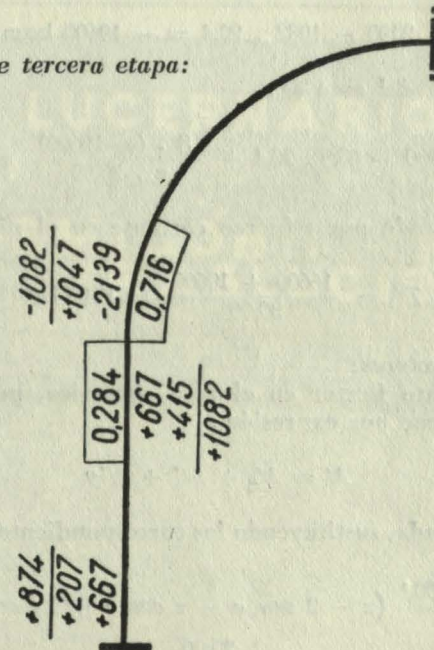
Pilar: $+\frac{6 EJ}{l^2} \Lambda = \frac{6}{30,00^2} \cdot 100000 = +667 \text{ kgm.}$

El empuje del arco sin tener en cuenta momentos:

$$-\frac{16 EJ}{\pi l^3} \Lambda = -\frac{16}{\pi \cdot 20,00^3} \cdot 100000 = -63,9 \text{ kg.}$$

Todos ellos multiplicados por un coeficiente δ a determinar.

Diagrama de tercera etapa:



Ecuación de equilibrio:

En este caso se plantea expresando el equilibrio de fuerzas en proyección horizontal en el nudo:

$$T''_1 - H'_2 = 0$$

siendo:

$$T''_1 = \frac{-2490 - 1240}{30,00} + \frac{1082 + 874}{30,00} \delta = -124 + 65,4 \delta$$

$$H'_2 = 5000 + \frac{8 \cdot 2490}{\pi \cdot 20,00} \left[-63,9 + \frac{8 \cdot (-1082)}{\pi \cdot 20,00} \right] \delta = 5317 - 201,7 \delta$$

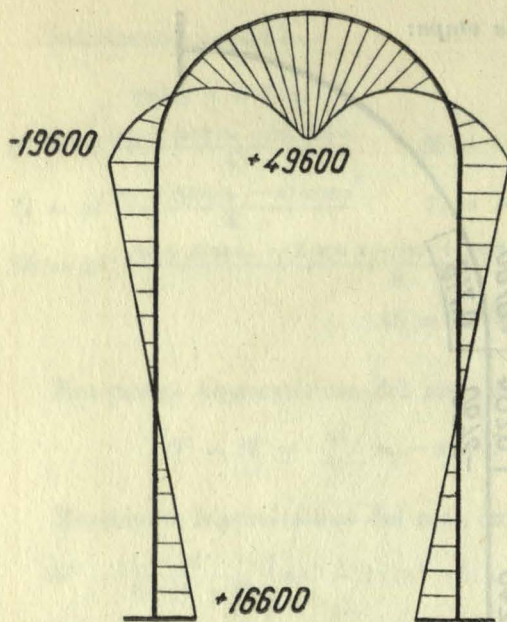


Figura 11

Quedando, por tanto, la siguiente ecuación:

$$-124 - 5317 + (65,4 + 201,7) \delta = 0$$

Que resuelta da el coeficiente de desplazamiento:

$$\delta = 20,4$$

Momentos de nudo definitivos:

Extremo inferior del pilar:

$$-1240 + 874 \cdot 20,4 = 16600 \text{ kgm.}$$

Arranque del arco:

$$+2490 - 1082 \cdot 20,4 = -19600 \text{ kgm.}$$

El empuje del arco es:

$$H'_2 = 5000 - 63,9 \cdot 20,4 + \frac{8 \cdot (-19600)}{\pi \cdot 20,09} = 1210 \text{ kg}$$

que es aguantado por esfuerzo cortante en el pilar

$$T'_1 = \frac{16600 + 19600}{30,00} = 1210 \text{ kg.}$$

Momentos flectores:

El momento flector en el arco simétrico, por ser $M' = -M''$, tiene por expresión:

$$M = M_i + M' + H'y$$

que desarrollada, sustituyendo los correspondientes valores, es:

$$M = \frac{1000 \cdot 20,00^2}{8} (\pi - 2 \operatorname{sen} \alpha - \pi \cos \alpha + 2 \alpha \cos \alpha) - 19600 + 1210 \cdot \frac{20,00}{2} \operatorname{sen} \alpha = 137500 - 87900 \operatorname{sen} \alpha - 157100 \cos \alpha + 100000 \alpha \cos \alpha$$

Valores del momento flector son:

$\alpha = 0^\circ$	$M = -19600 \text{ kgm}$
15°	-9100 kgm
30°	$+2800 \text{ kgm}$
45°	$+19700 \text{ kgm}$
60°	$+35200 \text{ kgm}$
75°	$+45800 \text{ kgm}$
90°	$+49600 \text{ kgm}$

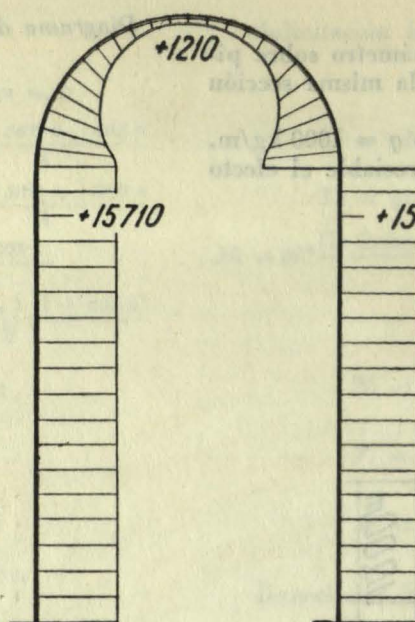


Figura 12

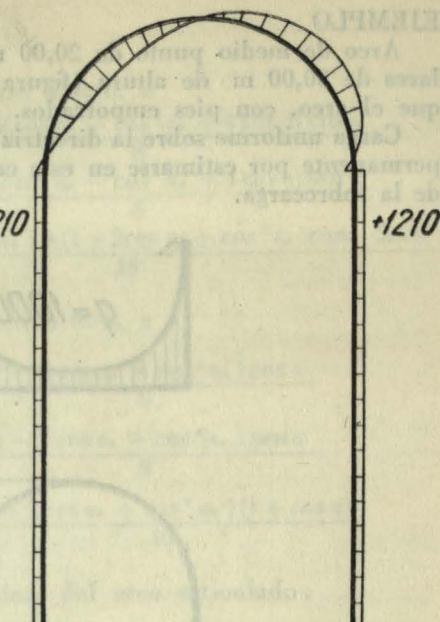


Figura 13

En el pilar tienen ley lineal; la gráfica se representa en la figura 11.

Esfuerzos axiales:

Tienen en el arco, en este caso, la expresión siguiente:

$$N = N_i + H' \operatorname{sen} \alpha$$

que desarrollada es:

$$N = \frac{1000 \cdot 20,00}{4} (\pi - 2\alpha) \cos \alpha + 1210 \operatorname{sen} \alpha = 15710 \cos \alpha - 10000 \alpha \cos \alpha + 1210 \operatorname{sen} \alpha$$

Valores del esfuerzo axial son:

$\alpha = 0^\circ$	$N = +15710 \text{ kgm}$
15°	$+12950 \text{ kgm}$
30°	$+9690 \text{ kgm}$
45°	$+6400 \text{ kgm}$
60°	$+3670 \text{ kgm}$
75°	$+1850 \text{ kgm}$
90°	$+1210 \text{ kgm}$

En el pilar son constantes; su gráfica se representa en la figura 12.

Esfuerzos cortantes:

La expresión de los esfuerzos cortantes en el arco es, en este caso:

$$T = T_i - H' \cos \alpha$$

la cual, desarrollada, es:

$$T = \frac{1000 \cdot 20,00}{4} (\pi - 2\alpha) \operatorname{sen} \alpha - 1210 \cos \alpha = 15710 \operatorname{sen} \alpha - 10000 \alpha \operatorname{sen} \alpha - 1210 \cos \alpha$$

Los valores suyos son:

$\alpha = 0^\circ$	$T = -1210 \text{ kgm}$
15°	$+2220 \text{ kgm}$
30°	$+4190 \text{ kgm}$
45°	$+4700 \text{ kgm}$
60°	$+4000 \text{ kgm}$
75°	$+2220 \text{ kgm}$
90°	0 kgm

Los esfuerzos cortantes en el pilar son constantes. La gráfica se representa en la figura 13.